Obvojna površ

Obvojna površ (obvojnica ili anvelopa) familije površi u prostoru je površ koja u svakoj svojoj tački dodiruje bar jednu površ familije.

Ako familija površi $f(x, y, z, a) = 0$ ima obvojnu površ, to ona sva leži na površi $F(x, y, z) = 0$ koja se dobija eliminacijom parametra a iz jednačina

$$f(x, y, z, a) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a} = 0 .$$

Ako dvoparametarska površ $f(x, y, z, a, b) = 0$ ima obvojnu površ to sve njene tačke zadovoljavaju jednačinu $F(x, y, z) = 0$ koja se dobija eliminacijom parametara a i b iz jednačina

$$f(x, y, z, a, b) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial b} = 0 ,$$

no tu jednačinu mogu zadovoljiti i druge tačke

Naći obvojnu površ familije sferi
$$(x-a)^2+y^2+z^2-1=0.$$

Rj.

Ako familija površi $f(x,y,z,a)=0$ ima obvojnu površ, to ona sva leži na površi $F(x,y,z)=0$ koja se dobija eliminacijom parametra a iz jednačina
$$f(x,y,z,a)=0, \qquad \frac{\partial f}{\partial a}=0.$$

$$f(x,y,z,a)=(x-a)^2+y^2+z^2-1$$

$$\frac{\partial f}{\partial a}=2(x-a)(-1)=-2x+2a$$

$$\begin{aligned}(x-a)^2+y^2+z^2&=1\\ -2x+2a&=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x-a)^2+y^2+z^2&=1\\ -2(x-a)&=0\end{aligned}$$

$$y^2+z^2=1$$

Jednačina obvojne površi je
$$y^2+z^2=1$$
kružni cilindar čije su izvodnice paralelne x osi.

Nađi obvojnu površ familije sferi

$$(x-pa)^2+(y-qa)^2+(z-ra)^2=s^2a^2$$

gdje je a parametar.

Rj.

$$f(x,y,z,a)=(x-pa)^2+(y-qa)^2+(z-ra)^2-s^2a^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial a}=-2p(x-pa)-2q(y-qa)-2r(z-ra)-2s^2a$$

$$(x-pa)^2+(y-qa)^2+(z-ra)^2=s^2a^2 \quad \dots(1)$$

$$p(x-pa)+q(y-qa)+r(z-ra)=-s^2a \quad \dots(2)$$

$$(2) \Rightarrow \quad px+qy+rz-p^2a-q^2a-r^2a=-s^2a$$

$$px+qy+rz=(p^2+q^2+r^2-s^2)a$$

odakle je $\quad a=\dfrac{px+qy+rz}{p^2+q^2+r^2-s^2}$

Ako uvedemo smjene $\quad px+qy+rz=\alpha$

$$p^2+q^2+r^2-s^2=\beta \quad (\beta\neq 0)$$

tada je $a=\dfrac{\alpha}{\beta}$, i zamjenjujući ovu vrijednost od a u (1) dobijamo jednačinu obvojne površi

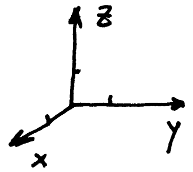
$$\left(x-p\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+\left(y-q\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+\left(z-r\frac{\alpha}{\beta}\right)^2=s^2\frac{\alpha^2}{\beta^2} \quad /\cdot\beta^2$$

$$(\beta x-p\alpha)^2+(\beta y-q\alpha)^2+(\beta z-r\alpha)^2=s^2\alpha^2$$

(#) Naći obvojnu površ ravni koje prolaze kroz tačku $(\sqrt{2}, 0, 0)$ i od koordinatnog početka su na rastojanju 1.

Rj.

Prvo želimo pronaći familiju ravni koje prolaze kroz tačku $(\sqrt{2}, 0, 0)$ i od koordinatnog početka su na rastojanju 1. Nijedna ravan iz te familije nije paralelna x-osi



$$A(x-\sqrt{2})+By+Cz=0$$

$\vec{n}=(A,B,C)$

Kako nijedna ravan nije paralelna sa x-osom to $A\neq 0$, pa možemo uzeti da je vrijednost od $A=1$.

$$x+By+Cz=\sqrt{2}$$

Udaljenost ravni $Ax+By+Cz+D=0$ od tačke (x_1, y_1, z_1) se računa po formuli

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+B^2+C^2}}=1$$

↑ u našem slučaju rastojanje ravni od koordinatnog početka je uvijek jedan,

$$\Rightarrow \sqrt{1+B^2+C^2}=\sqrt{2}$$

$$1+B^2+C^2=2$$

$$B^2=1-C^2$$

$$B=\pm\sqrt{1-C^2},$$

$$|C|<1.$$

Ako vratimo dobijenu vrijednost za B u gornju jednakost dobijemo konačni oblik jednačine ravni koje zadovoljavaju uslov zadatka (sa parametrom C)

$$x\pm\sqrt{1-c^2}\,y+z=0, \quad |c|<1$$

Pronađimo obvojnu površ za dobijenu familiju ravni:

$$x \pm \sqrt{1-c^2}\, y + Cz = \sqrt{2} \quad \ldots (*)$$

izvod po c-u:

$$\frac{-c}{\pm\sqrt{1-c^2}} y + z = 0 \iff -cy \pm \sqrt{1-c^2}\, z = 0$$

$$\iff \pm\sqrt{1-c^2}\, z = cy \iff (1-c^2) z^2 = c^2 y^2$$

$$\iff c^2(y^2+z^2) = z^2$$

$$\Rightarrow C = \frac{\pm z}{\sqrt{y^2+z^2}} \quad \wedge \quad c^2 = \frac{z^2}{y^2+z^2}$$

$$\sqrt{1-c^2} = \sqrt{\frac{y^2+z^2-z^2}{y^2+z^2}} = \frac{\pm y}{\sqrt{y^2+z^2}} \quad \ldots (**)$$

Iz (*) i (**) dobijamo jednačinu obvojne površi

$$x \pm \frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}} \cdot y \pm \frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}} \cdot z = \sqrt{2}$$

$$x \pm \frac{y^2+z^2}{\sqrt{y^2+z^2}} = \sqrt{2} \iff (x-\sqrt{2})^2 = y^2+z^2$$

ovo je jednačina konusa čije je teme u tački $(\sqrt{2}, 0, 0)$ a osa simetrije joj je x-osa.

Naći obvojnu površ familije elipsi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{pri uslovu } a+b+c=1.$$

Rj.

Pri datom uslovu familija elipsi se pretvara u

$$\frac{x^2}{(1-b-c)^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \ldots(*)$$

Parcijalni izvodi od $(*)$ po b i c su:

po b:
$$(-2)x^2(1-b-c)^{-3}\cdot(-1)+y^2\cdot(-2)b^{-3}=0 \quad /:(-2)$$

$$\frac{x^2}{(1-b-c)^3}-\frac{y^2}{b^3}=0 \qquad \ldots(**)$$

po c:
$$x^2(-2)(1-b-c)^{-3}(-1)+z^2(-2)c^{-3}=0 \quad /:(-2)$$

$$\frac{x^2}{(1-b-c)^3}-\frac{z^2}{c^3}=0 \qquad \ldots(***)$$

Eliminisanjem parametara b i c iz $(*)$, $(**)$ i $(***)$ dobićemo jednačinu tražene obvojne površi.

$$(**) \text{ i } (***) \Rightarrow \frac{y^2}{b^3}=\frac{z^2}{c^3} \Rightarrow \frac{c^3}{b^3}=\frac{z^2}{y^2} \Rightarrow c=\left(\frac{z}{y}\right)^{\frac{2}{3}}b$$

Ako uvrstimo dobijeno c u $(***)$ imamo da je

$$\frac{x^2}{\left(1-b-\left(\frac{z}{y}\right)^{\frac{2}{3}}b\right)^3}=\frac{z^2}{c^3}=\frac{y^2}{b^3} \Rightarrow \frac{x^{\frac{2}{3}}}{1-b-\left(\frac{z}{y}\right)^{\frac{2}{3}}b}=\frac{y^{\frac{2}{3}}}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{1-b-\left(\frac{z}{y}\right)^{\frac{2}{3}}b}{b}=\frac{x^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{2}{3}}}$$

$$\frac{1}{b}=\frac{x^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{2}{3}}}+1+\left(\frac{z}{y}\right)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow b=\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}} \qquad \ldots(\square)$$

Kako je $c=\left(\frac{z}{y}\right)^{\frac{2}{3}} b \overset{(\square)}{\Longrightarrow} \quad c = \dfrac{z^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}}$ $\quad \ldots(\square\square)$

Ako uvrstimo vrijednosti od b i c iz $(\square)$ i $(\square\square)$ u $(*)$ dobićemo jednačine obvojne površi

$$\boxed{1-b-c = \frac{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}-z^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}} = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}}}$$

$$\frac{x^2}{\dfrac{x^{\frac{4}{3}}}{\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{2/3}\right)^2}} + \frac{y^2}{\dfrac{y^{4/3}}{\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{2/3}+z^{2/3}\right)^2}} + \frac{z^2}{\dfrac{z^{4/3}}{\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{2/3}+z^{2/3}\right)^2}} = 1$$

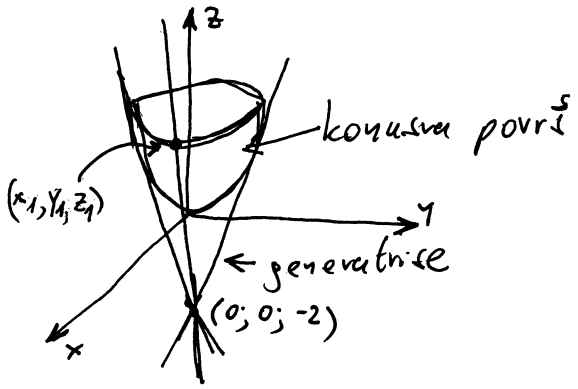
$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=1$$

tražena obvojna površ

(#) Oko paraboloida $x^2+y^2=2z$ opisati konusnu površ sa tjemenom u tački $(0;0;-2)$.

Rj.

Konusna površ je površ koja nastaje kretanjem prave koja cijelo vrijeme prolazi kroz neku datu fiksiranu tačku S i siječe nepokretnu datu krivu (direktrisa).



Tačka (x_1, y_1, z_1) paraboloida će biti i tačka konusa ako tangentna ravan paraboloida u toj tački sadrži i vrh konusa $(0;0;-2)$.

Kako tačka (x_1, y_1, z_1) pripada paraboloidu, imamo

$$x_1^2+y_1^2=2z_1 \quad \ldots(1)$$

Vektor normale $\vec{n}$ na paraboloid je $\vec{n}=(2x, 2y, -2)$ pa je jednačina tangentne ravni u tački $(x_1; y_1; z_1)$

$$2x_1(x-x_1)+2y_1(y-y_1)-2(z-z_1)=0 \quad /:2$$

$$x_1(x-x_1)+y_1(y-y_1)-(z-z_1)=0$$

$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$ jedn. ravni

Kako tačka $(0;0;-2)$ pripada ravni imamo

$$-x_1^2-y_1^2+z_1+2=0 \quad \ldots(2)$$

Jednačina generatrise kroz tačke (x_1, y_1, z_1) i $(0,0,-2)$ je

$$\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z+2}{z_1+2} \quad \left(=\frac{1}{t}\right)$$

$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ jedn. prave kroz dvije tačke

$x_1=xt \quad \ldots(3)$

$y_1=yt \quad \ldots(4)$

$z_1=(z+2)t-2 \quad \ldots(5)$

Eliminišući parametre x_1, y_1, z_1 i t iz (1), (2), (3), (4) i (5) dobijemo jednačinu tražene površi.

$(1)+(2):\quad z_1=2$

$z=2$ i (5) $\Rightarrow$ $t=\dfrac{4}{z+2}$ $\xRightarrow{(3)\ i\ (4)}$ $x_1=\dfrac{4x}{z+2}$, $y_1=\dfrac{4y}{z+2}$

Ako uvrstimo gornje vrijednosti za x_1, y_1, z_1 u (1) dobićemo jednačinu konusne površi

$$\left(\frac{4x}{z+2}\right)^2+\left(\frac{4y}{z+2}\right)^2=4$$

$$16x^2+16y^2=4(z+2)^2 \quad /:4$$

$$4(x^2+y^2)=(z+2)^2$$

tražena jednačina konusne površi

Dio tablica integrala.

1. $\int u^a \mathrm{d}u = \frac{u^{a+1}}{a+1} + C,\ a \neq -1.$
2. $\int u^{-1} \mathrm{d}u = \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int \frac{u'}{u} \mathrm{d}x = \ln|u| + C.$
3. $\int a^u \mathrm{d}u = \frac{a^u}{\ln|a|} + C; \int e^u \mathrm{d}u = e^u + C.$
4. $\int \sin \mathrm{d}u = -\cos u + C.$
5. $\int \cos \mathrm{d}u = \sin u + C.$
6. $\int \frac{1}{\cos^2 u} \mathrm{d}u = \operatorname{tg} u + C.$
7. $\int \frac{1}{\sin^2 u} \mathrm{d}u = -\operatorname{ctg} u + C.$
8. $\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{u}{a} + C.$
9. $\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C.$
10. $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C.$
11. $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2 + a}} = \ln|u + \sqrt{u^2 + a}| + C.$

Newton-Leibnizova formula.

$$\int_a^b f(u)\mathrm{d}u = \int f(u)\mathrm{d}u\Big|_a^b = F(u)|_a^b = F(b) - F(a), \text{ gdje je } F'(u) = f(u).$$

Osobine određenih integrala.

1. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x.$
2. $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0.$
3. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$
4. $\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x + \int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f_3(x)\mathrm{d}x.$
5. $\int_a^b c\, f(x)\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

Smjena promjenjivih u određenom integralu.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} x = \varphi(t) & x = a \Rightarrow a = \varphi(\alpha) \Rightarrow t = \alpha \\ dx = \varphi'(t)\mathrm{d}t & x = b \Rightarrow b = \varphi(\beta) \Rightarrow t = \beta \end{array} \right| = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta h(t)\mathrm{d}t$$

Nepravi integrali. $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x,\ \int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,...

Računanje površine ravne figure. U zavisnosti od izgleda slike: $P = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, $P = \int_c^d g(y)\mathrm{d}y$, $P = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, $P = \int_a^b [\eta(x) - \mu(x)]\mathrm{d}x$, $P = \int_c^d [g(y) - h(y)]\mathrm{d}y$, ...

Zapremina rotacionog tijela. Ako, kriva data u parametarskom obliku $C : \left\{ \begin{array}{c} x = \eta(t) \\ y = \mu(t) \\ t_1 \leq t \leq t_2 \end{array} \right.$ rotira oko x-ose, zapremine se računa po formuli

$$V_x = \pi \int_{t_1}^{t_2} [\mu(t)]^2 |\eta'(t)| \mathrm{d}t.$$

Ista kriva ako rotira oko y-ose, $V_y = \pi \int_{t_1}^{t_2} [\eta(t)]^2 |\mu'(t)| \mathrm{d}t$. Iz ove dvije formule, za funkcije $y = f(x)$ i $x = g(y)$, slijedi $V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \mathrm{d}x$ i $V_y = \pi \int_c^d [g(y)]^2 \mathrm{d}y$.